

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

1 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1. [1] Εξετάστε σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 + \sin(xy), & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια, τη μερική διαφορισιμότητα και τη διαφορισιμότητά της, και δώστε, όπου υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την παράγωγο, και το εφαπτόμενο επίπεδό της.

Θέμα 2. [1] Εξετάστε αν υπάρχουν τα ακόλουθα όρια, και, αν υπάρχουν, υπολογίστε τα:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + y^2 - 2}{|x-1| + |y-1|}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Θέμα 3. [2] Έστω $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, όπου

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, & x \in [-1, 0], \\ -(x-1)^2, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_2(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in [-1, 0], \\ (x-1)^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

(α) Σχεδιάστε το U .

(β) Δείξτε ότι το U είναι κλειστό και φραγμένο.

(γ) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$.

(δ) Γιατί είμαστε σίγουροι ότι η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο;

Θέμα 4. [1.5] Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x}) \cdot \bar{x}$, όπου

$$\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_i(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^{2i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(α) Δείξτε ότι η παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και υπολογίστε την.

(β) Σε ποιά σημεία $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη η \bar{g} ;

Θέμα 5. [1.5] Σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου \mathbb{R}^2 επικρατεί η θερμοκρασία $T(x, y) = x^2 + 2y^2$. Βρίσκειτε στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Προς ποιά κατεύθυνση $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, πρέπει να κινηθείτε για να αισθανθείτε την πιο γρήγορη μείωση θερμοκρασίας; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 6. [1] Για ποιές τιμές του μήκους $\ell \geq 0$, του πλάτους $w \geq 0$ και του ύψους-του $h \geq 0$ έχει ένα ορθογώνιο κουτί τον μεγαλύτερο όγκο, αν πρέπει να ισχύει $\ell + 2w + 2h \leq 3$;

Θέμα 7. [2] Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Αν $U = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, δώστε ένα παράδειγμα μιας μη φραγμένης, αλλά συνεχούς συνάρτησης $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

(β) Έστω ότι για κάθε $\bar{x} \in \partial U$ υπάρχει το όριο $\lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} f(\bar{y}) \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(\bar{x}) := \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in U, \\ \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} f(\bar{y}), & \bar{x} \in \partial U \end{cases}$$

είναι συνεχής συνάρτηση, δηλ. είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x} \in \bar{U}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!